

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Medio

Prueba 2

9 de mayo de 2023

Zona A tarde | Zona B mañana | Zona C tarde

Número de convocatoria del alumno

| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

Un botánico realiza un experimento en el que estudia el crecimiento de las plantas.

La altura de las plantas la mide en siete días distintos.

En la siguiente tabla se muestra el número de días (d), que lleva en marcha el experimento y la altura promedio (h cm) que tienen las plantas cada uno de esos días.

| | | | | | | | |
|-------------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| Número de días (d) | 2 | 5 | 13 | 24 | 33 | 37 | 42 |
| Altura promedio (h) | 10 | 16 | 30 | 59 | 76 | 79 | 82 |

(a) La recta de regresión de h sobre d para estos datos se puede escribir en la forma $h = ad + b$.

Halle el valor de a y el valor de b . [2]

(b) Escriba el valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r). [1]

(c) Utilice su recta de regresión para estimar la altura promedio que tendrán las plantas cuando el experimento lleve en marcha 20 días. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

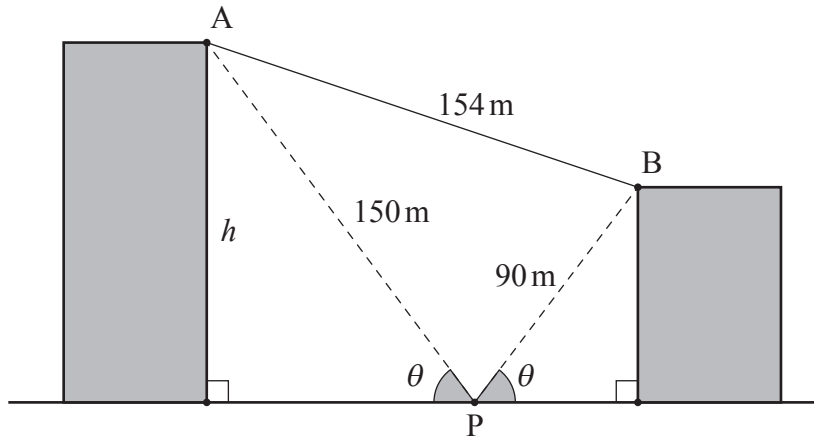


2. [Puntuación máxima: 6]

En la siguiente figura se muestran dos edificios construidos en un terreno llano.

Desde el punto P —situado en el suelo y entre los dos edificios— el ángulo de elevación hasta la parte superior de cada edificio es igual a θ .

la figura no está dibujada a escala



La distancia entre el punto P y el punto A (ubicado en la parte superior del edificio más alto) es igual a 150 metros.

La distancia entre el punto P y el punto B (ubicado en la parte superior del edificio más bajo) es igual a 90 metros.

La distancia entre A y B es igual a 154 metros.

- (a) Halle el tamaño de $\hat{A}PB$. [3]
- (b) Halle la altura (h) del edificio más alto. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Véase al dorso

3. [Puntuación máxima: 5]

La cantidad de fármaco (en miligramos, [mg]) que hay en el organismo de un paciente se puede modelizar mediante la función $A(t) = 500e^{-kt}$, donde k es una constante positiva y t es el tiempo (en horas) que ha transcurrido desde que se le ha puesto la dosis inicial de dicho fármaco.

(a) Escriba la cantidad de fármaco que hay en el organismo del paciente cuando $t = 0$. [1]

Cuando han transcurrido tres horas, la cantidad de fármaco que hay en el organismo del paciente ha disminuido hasta los 280 mg.

(b) Halle el valor de k . [2]

La segunda dosis se pone T horas después de la dosis inicial, cuando la cantidad de fármaco que hay en el organismo del paciente es igual a 140 mg.

(c) Halle el valor de T . [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Puntuación máxima: 8]

Los pesos (W gramos) de los paquetes de arroz que se envasan en una fábrica siguen una distribución normal de media 204 gramos y desviación típica igual a 5 gramos.

(a) Se escoge un paquete de arroz al azar.

Halle la probabilidad de que pese más de 210 gramos. [2]

Según este modelo, el 80% de los paquetes de arroz pesan entre w gramos y 210 gramos.

(b) Halle la probabilidad de que un paquete de arroz elegido al azar pese menos de w gramos. [2]

(c) Halle el valor de w . [2]

(d) Ahora se escogen al azar diez paquetes de arroz.

Halle la probabilidad de que haya exactamente un paquete que pese menos de w gramos. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Puntuación máxima: 7]

El desarrollo de $(x + h)^8$, donde $h > 0$, se puede escribir así:
 $x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + \dots + h^8$, donde $a, b, c, d, \dots \in \mathbb{R}$.

(a) Halle una expresión, en función de h , para:

(i) a

(ii) b

(iii) d

[4]

(b) Sabiendo que a, b , y d son los tres primeros términos de una progresión geométrica, halle el valor de h .

[3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

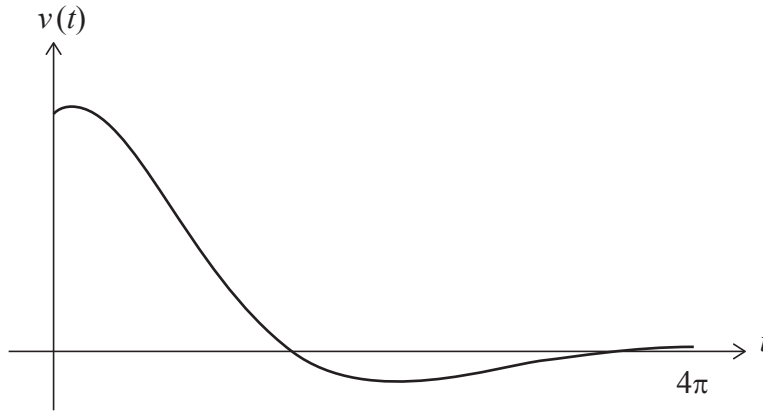
.....



6. [Puntuación máxima: 6]

Una partícula se mueve en línea recta, de modo tal que su velocidad ($v \text{ m s}^{-1}$), en el instante t segundos viene dada por $v(t) = 4e^{-\frac{t}{3}} \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, para $0 \leq t \leq 4\pi$.

El gráfico de v se muestra en la siguiente figura.



Sea t_1 el primer instante en el que la **aceleración** de la partícula es igual a cero.

(a) Halle el valor de t_1 . [2]

Sea t_2 el **segundo** instante en el que la partícula está instantáneamente en reposo.

(b) Halle el valor de t_2 . [2]

(c) Halle la distancia que ha recorrido la partícula entre $t = t_1$ y $t = t_2$. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

7. [Puntuación máxima: 15]

Considere la función $h(x) = \sqrt{4x-2}$, para $x \geq \frac{1}{2}$.

- (a) (i) Halle $h^{-1}(x)$ —es decir, la inversa de $h(x)$ — e indique su dominio. [5]
 (ii) Escriba el recorrido de $h^{-1}(x)$. [5]
- (b) El gráfico de h y el gráfico de h^{-1} se cortan en dos puntos. [3]
 Halle la coordenada x de estos dos puntos. [3]
- (c) Halle el área delimitada por el gráfico de h y el gráfico de h^{-1} . [2]
- (d) Halle $h'(x)$. [2]
- (e) Halle el valor de x para el cual el gráfico de h y el gráfico de h^{-1} tienen la misma pendiente. [3]

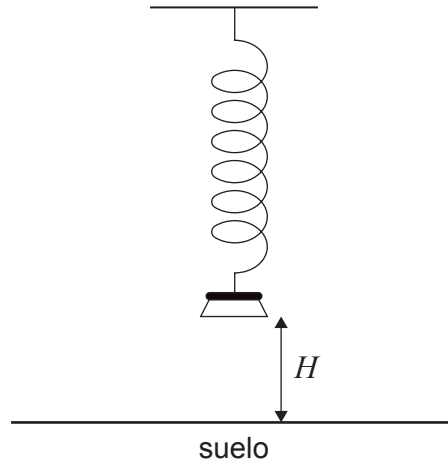


No escriba soluciones en esta página.

8. [Puntuación máxima: 13]

Hay un peso suspendido de un muelle. Se tira del peso y luego se suelta, de modo que se mueva hacia arriba y hacia abajo en vertical.

La altura (H metros) a la que se encuentra la base del peso respecto al suelo se puede modelizar mediante la función $H(t) = a \cos(7,8t) + b$, para $a, b \in \mathbb{R}$ y $0 \leq t \leq 10$, donde t es el tiempo (en segundos) que ha transcurrido desde que se soltó el peso.



(a) Halle el período de la función.

[2]

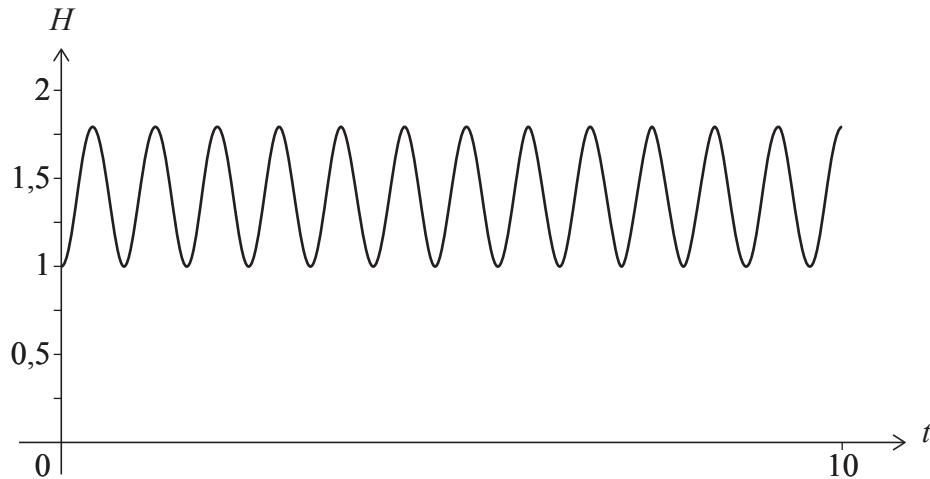
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 8: continuación)

El peso se suelta cuando su base está a una altura mínima de 1 metro respecto al suelo y alcanza una altura máxima de 1,8 metros respecto al suelo. En la siguiente figura se muestra el gráfico de H .



- (b) Halle el valor de:
 - (i) a
 - (ii) b [3]
 - (c) Halle el número de veces que el peso alcanza su altura máxima durante los cinco primeros segundos que está moviéndose. [2]
 - (d) Halle el primer instante en el que la base del peso alcanza una altura de 1,5 metros. [2]
- Se configura una cámara para que haga una foto del peso en un instante elegido al azar, dentro de esos cinco primeros segundos que el peso está moviéndose.
- (e) Halle la probabilidad de que la altura de la base del peso sea mayor que 1,5 metros en el instante en el que se hace la foto. [4]



No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 15]

Una bolsa contiene n bolas. Se sabe que diez de las bolas son verdes y que el resto de las bolas son rojas. Se van extrayendo bolas de la bolsa, de una en una y sin reposición.

(a) Halle, en función de n , la probabilidad de que:

(i) La primera bola que se extraiga sea verde

(ii) Las dos primeras bolas sean verdes

[3]

Para los siguientes apartados de la pregunta, sea $n = 25$.

(b) Muestre que la probabilidad de que las dos primeras bolas sean rojas es 0,35.

[2]

(c) Halle la probabilidad de que las tres primeras bolas sean todas rojas.

[2]

(d) Halle la probabilidad de que al menos una de las tres primeras bolas sea verde.

[2]

Un juego consiste en extraer **cuatro** bolas — de una en una y sin reposición— de la bolsa de las 25 bolas. Los puntos que obtiene cada jugador dependen de cuándo aparezca la primera bola verde. Al final de cada juego, las cuatro bolas extraídas se devuelven a la bolsa.

El jugador obtiene cero puntos si no saca ninguna bola verde o si la primera bola verde la saca en la primera o en la segunda extracción.

El jugador obtiene 10 puntos si la primera bola verde la saca en la tercera extracción y obtiene 50 puntos si la primera bola verde la saca en la cuarta extracción.

Millie juega a este juego k veces. Su puntuación se calcula sumando todos los puntos que ha obtenido cada vez que juega.

(e) Halle el valor más pequeño de k para el cual la puntuación esperada de Millie es mayor que 100.

[6]

Fuentes:

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

